Circuitos Eléctricos: Respuesta en Frecuencia

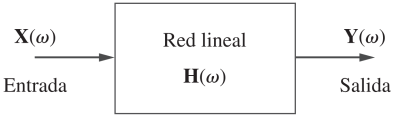
Thomas Ramírez Rozo

Instituto Tecnológico Metropolitano

Institución Universitaria

thomasramirez@itm.edu.co

Función de Transferencia



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

La función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ de un circuito es la relación de una salida fasorial entre $\mathbf{Y}(\omega)$ (una tensión o corriente de elemento) y una entrada fasorial $\mathbf{X}(\omega)$ (tensión o corriente de la fuente) en función de la frecuencia ω

La respuesta en frecuencia de un circuito es la gráfica de la función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ de este mismo, en función de ω, y que varía desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$

Función de Transferencia

Puesto que la entrada y la salida pueden ser una tensión o una corriente en cualquier parte del circuito, existen cuatro posibles funciones de transferencia:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad \text{Ganancia de Tensión}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad \text{Ganancia de Corriente}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad \text{Transferencia de Impedancia}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad \text{Transferencia de Admitancia}$$

Función de Transferencia

La función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ puede expresarse en términos de sus polinomios numerador $\mathbf{N}(\omega)$ y el del denominador $\mathbf{D}(\omega)$ como:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

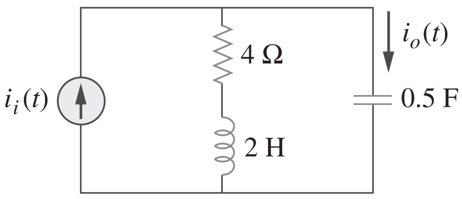
Las raíces de $\mathbf{N}(\omega) = 0$ se llaman los ceros de $\mathbf{H}(\omega) = 0$ y suelen representarse como $j\omega = z_1, z_2, \ldots$ De manera similar, las raíces de $\mathbf{D}(\omega) = 0$ son los polos de $\mathbf{H}(\omega) = 0$ y se representan como $j\omega = p_1, p_2, \ldots$

Un **cero** , como una raíz de polinomio del numerador, es un valor que produce un valor cero de la función. Un **polo** , como una raíz del polinomio del denominador, es un valor para el cual la función es infinita.

Función de Transferencia

Ejemplo:

Para el circuito de la Figura, calcule la ganancia $\frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)}$, sus polos y sus ceros.



Resonancia Serie

Resonancia

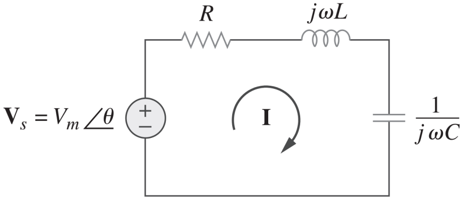
La resonancia es una condición en un circuito RLC en el cual las reactancias capacitiva e inductiva son de igual magnitud, por lo cual dan lugar a una impedancia resistiva.

Los circuitos resonantes (en serie o en paralelo) son útiles para construir filtros, pues sus funciones de transferencia pueden ser altamente selectivas en frecuencia.

Resonancia en Serie

Considérese el circuito RLC que se muestra en la figura. La impedancia de entrada es:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_s}}{\mathbf{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$



O sea

$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

la resonancia se produce cuando la parte imaginaria de la función de transferencia es cero, o sea

$$\mathrm{Im}(\mathbf{Z}) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

El valor de ω que satisface esta condición recibe el nombre de Frecuencia Resonante ω_0 , la condición de resonancia es:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Donde,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \mathrm{rad/s}$$

Puesto que

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \mathrm{Hz}$$

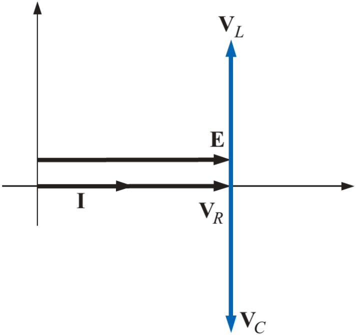
Resosnancia en Serie

Como la corriente es la misma a través del capacitor y del inductor, el voltaje en cada uno es igual en magnitud pero desfasados 180°.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_L &= (\mathbf{I}\angle 0^\circ)(X_L\angle 90^\circ) &= IX_L\angle 90^\circ \\ \mathbf{V}_C &= (\mathbf{I}\angle 0^\circ)(X_C\angle -90^\circ) &= IX_C\angle -90^\circ \end{aligned}\right\} \text{Desfasados } 180^\circ$$

El voltaje y la corriente en resonancia están en fase , Dado que $X_L = X_C$, la magnitud de V_L es igual a V_C.

$$V_L = V_C$$



Resonancia Serie

La Potencia Aparente S y la Potencia Promedio P disipada por el resistor son iguales. El factor de potencia del circuito en resonancia es:

$$fp = \cos\theta = \frac{P}{S}$$

y

$$fp = 1$$

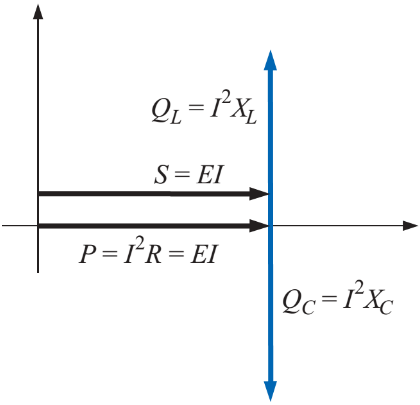
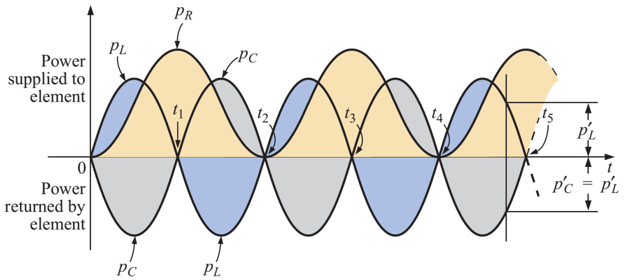


Figura: Triangulo de potencias para el circuito resonante en serie.

Resonancia Serie

Al graficar las curvas de potencia de cada elemento, se observa que aunque la potencia reactiva total en cualquier momento es igual a cero. En resonancia aun se absorbe y libera energía por el inductor y el capacitor.



Resonancia en Serie

Factor de Calidad Q

Es un indicador de cuanta energía se almacena en comparación a la disipada. Entre menor es el nivel de disipación para la misma potencia reactiva, mayor es Q y más concentrada e intensa es la región de resonancia.

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}, \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Resonancia Serie

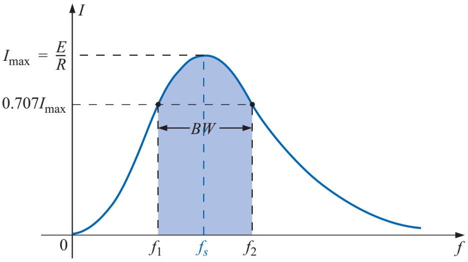


Figura: Curva de selectividad

La mayor potencia que se disipa en resonancia es cuando $I = V_m/R$, por lo que:

$$P(\omega_0) = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R}$$

Existe un intervalo de frecuencias definido en el que la corriente está cerca de su valor máximo y la impedancia cerca de su valor mínimo. Tales frecuencias se conocen como Frecuencias de Corte , en la gráfica corresponden a f_1 y f_2 (ω_1 y ω_2).

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$
$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

El intervalo entre f_1 y f_2 se conoce como **Ancho de Banda (BW)** del circuito resonante.

$$BW = B = \omega_1 - \omega_2$$

Resonancia Serie

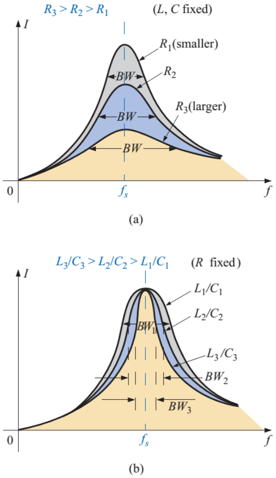


Figura: Curvas de selectividad

La forma de la curva depende de cada elemento del circuito serie R–L–C.

Si la resistencia se hace pequeña con una inductacia y capacitancia fija, el ancho de banda decrece. Similarmente, si la relación L/C se incrementa con una resistencia fija, el ancho de banda nuevamente decrece y la selectividad se incrementa.

Factor de Calidad (Q) y Ancho de Banda

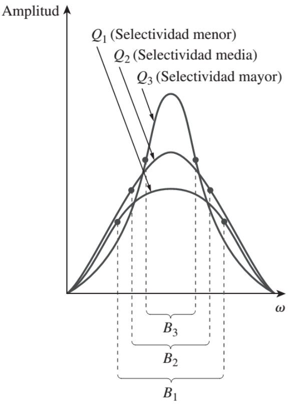


Figura: Cuanto más alta Q, tanto más pequeño el ancho de banda.

Si la banda de frecuencia que se va a seleccionar o a rechazar es estrecha, el **Q** del circuito resonante debe ser alto. Si la banda de frecuencias es amplia, el **Q** debe ser bajo.

Se afirma que un circuito será de alta Q cuando su factor de calidad sea igual o mayor que 10 ($Q \geq 10$)

Cuando ($Q \geq 10$)

Las frecuencias de media potencia se pueden aproximar a:

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{B}{2}, \qquad \omega_2 \simeq \omega_0 + \frac{B}{2}$$

Respuesta en Frecuencia

Institución Universitaria

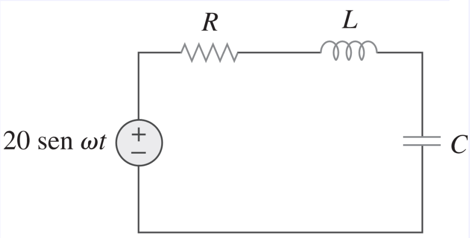
Ejemplo:

En el circuito de la Figura, $R = 2\Omega$, $L = 1m\text{H}$ y $C = 0{,}4\mu\text{F}$.

a) Determine la frecuencia resonante y las frecuencias de media potencia.

b) Calcule el factor de calidad y el ancho de banda.

c) Determine la amplitud de la corriente en ω_0, ω_1 y ω_2.



Resonancia en Paralelo

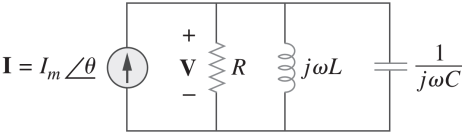


Figura: Circuito resonante en paralelo.

$$\mathbf{Y} = H(\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

o sea

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

La resonancia ocurre cuando la parte imaginaria de **Y** es cero.

$$\omega C - \frac{1}{\omega L}$$

Donde,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{rad/s}$$

Resonancia en Paralelo

Para la expresiones de frecuencia de media potencia reemplazamos R, L y C por $1/R$, $1/L$, y $1/C$ respectivamente. Se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{RC} \\ Q &= \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega L} \end{aligned}$$

De nuevo, para circuitos con alta Q ($Q \geq 10$)

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{B}{2}, \qquad \omega_2 \simeq \omega_0 + \frac{B}{2}$$

Resonancia Paralelo

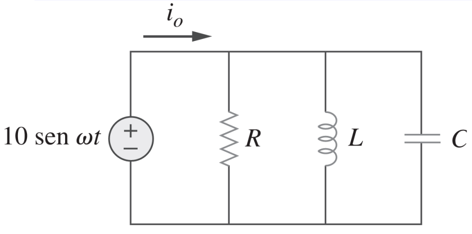
Ejemplo:

En el circuito RLC paralelo de la figura, sea $R = 8$ kΩ, $L = 0{,}2$mH, y $C = 8\mu$F.

a) Calcule ω_0, Q y B

b) Determine ω_1 y ω_2

c) Determine la potencia que se disipa en ω_0, ω_1, ω_2



Resumen: Resonancia Serie/Paralelo

Característica	**Circuito en serie**	**Circuito en paralelo**
Frecuencia resonante, ω_0	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Factor de calidad, Q	$\dfrac{\omega_0 L}{R}$ o $\dfrac{1}{\omega_0 RC}$	$\dfrac{R}{\omega_0 L}$ o $\omega_0 RC$
Ancho de banda, B	$\dfrac{\omega_0}{Q}$	$\dfrac{\omega_0}{Q}$
Frecuencias de media potencia, ω_1, ω_2	$\omega_0\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}$
Para $Q \geq 10$, ω_1, ω_2	$\omega_0 \pm \dfrac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \dfrac{B}{2}$

Filtros

Cualquier combinación de elementos pasivos (R, L, C) y/o activos (transistores y amplificadores operacionales) diseñados para seleccionar o rechazar una banda de frecuencias se denomina filtro.

Un filtro es un circuito que se diseña para dejar pasar señales con frecuencias deseadas y rechazar o atenuar otras.

Tipos de filtros:

- **Filtros Pasivos:** Son los compuestos de combinaciones en serie o en paralelo de elementos R, L, C.
- **Filtros Activos:** Son los que utilizan elementos activos tales como transistores y amplificadores operacionales en combinación con elementos R, L, C.

Filtros Ideales

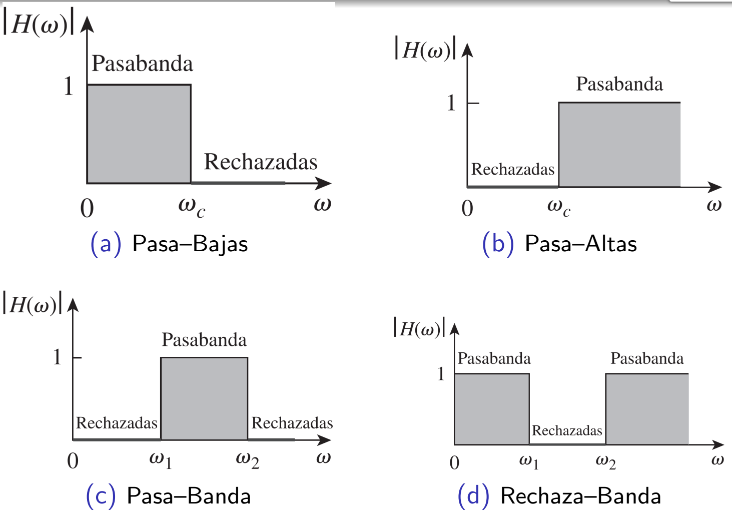
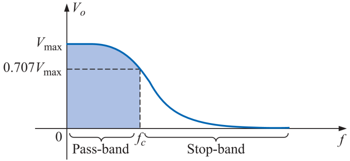


Figura: Los filtros ideales y sus respuestas

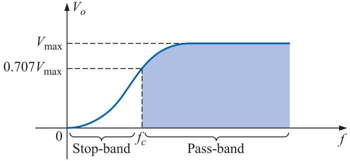
Filtros Ideales

Tipo de filtro	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega_c)$ o $H(\omega_0)$
Pasabajas	1	0	$1/\sqrt{2}$
Pasaaltas	0	1	$1/\sqrt{2}$
Pasabanda	0	0	1
Rechazabanda	1	1	0

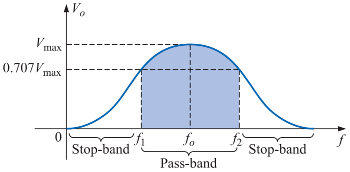
Tipos de Filtros y sus Respuestas



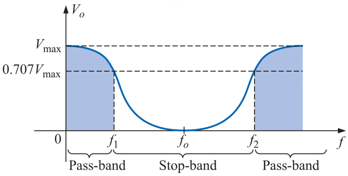
(a) Pasa–Bajas



(b) Pasa–Altas



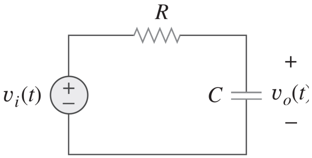
(c) Pasa–Banda



(d) Rechaza–Banda

Figura: Los filtros y sus respuestas

Filtro Pasabajas



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Filtro Pasabajas

Se forma cuando la salida de un circuito *RC* serie se toma del capacitor como se muestra en la figura.

Nótese que $\mathbf{H}(0) = 1, \quad \mathbf{H}(\infty) = 0$

Filtro Pasabajas

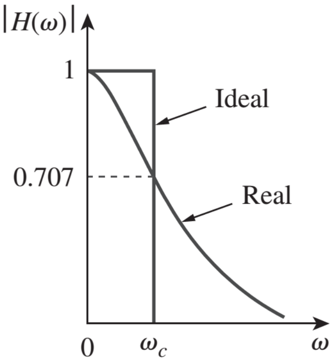


Figura: Respuesta en frecuencia real e ideal de un filtro pasabajas.

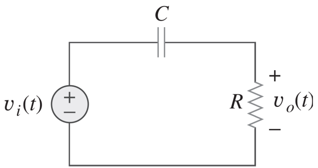
La frecuencia de corte se obtiene igualanado la magnitud de la función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ a $1/\sqrt{2}$, por lo tanto:

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Un filtro pasabajas también se puede formar cuando la salida de un circuito RL se toma de la resistencia

Filtro Pasaaltas



Un filtro pasaaltas se forma cuando la salida de un circuito RC se toma de la resistencia como se muestra en la figura.

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_i}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Observese que $\mathbf{H}(0) = 0, \quad \mathbf{H}(\infty) = 1$

Filtro Pasaaltas

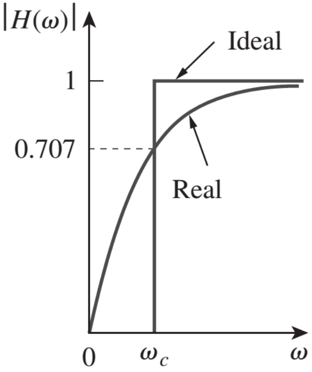


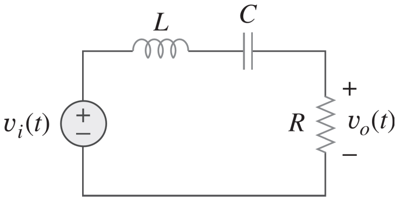
Figura: Respuesta en frecuencia real e ideal de un filtro pasaaltas.

También en esta caso la frecuencia de corte es:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

También es posible formar un filtro pasaaltas cuando la salida de un circuito RL se toma desde la bobina.

Filtro Pasabandas



El circuito resonante en serie RLC proporciona un filtro pasabanda cuando la salida se toma de la resistencia como se muestra en la figura.

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_i}} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

Obsérvese que $\mathbf{H}(0) = 0, \quad \mathbf{H}(\infty) = 0$

Filtro Pasabanda

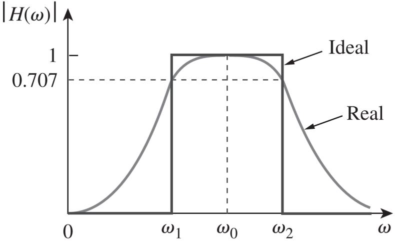
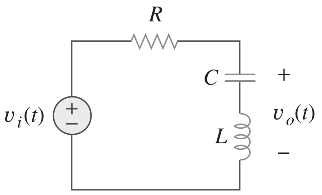


Figura: Respuesta en frecuencia real e ideal de un filtro pasabanda.

El filtro pasabanda deja pasar una banda de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_2$ centrada en ω_0, correspondientes a la frecuencia central, la cual está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Filtro Rechazabanda



Un filtro que evita el paso de una banda de frecuencias entre dos valores designados (ω_1 y ω_2) se conoce como filtro rechazabanda.

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_i}} = \frac{j(\omega L - 1/\omega C)}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

Obsérvese que $\mathbf{H}(0) = 1, \quad \mathbf{H}(\infty) = 1$

Filtro Rechazabanda

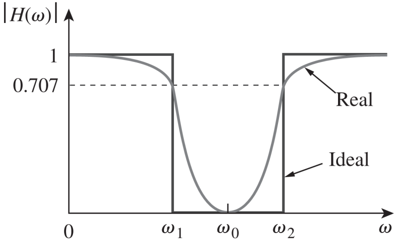


Figura: Respuesta en frecuencia real e ideal de un filtro pasabanda.

También en este caso, la frecuencia central está dada por:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

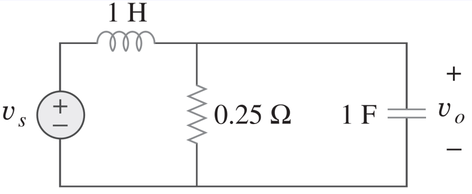
Las frecuencias de media potencia, el ancho de banda y el factor de calidad se calculan utilizando las fórmulas de resonancia.

Aquí, ω_0 recibe el nombre de *frecuencia de rechazo*, en tanto que el ancho de banda correspondiente $B = \omega_2 - \omega_1$ se conoce como el *ancho de banda de rechazo*.

Ejemplos

Ejemplos

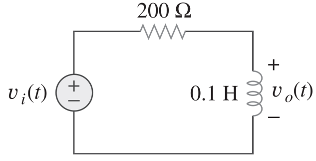
1. Demuestre que un circuito LR en serie es un filtro pasabajas si se toma la salida en la resistencia. Calcule la frecuencia de esquina o frecuencia de corte f_c si $L = 2\text{mH}$ y $R = 10k\Omega$.
2. Determine la función de transferencia $\mathbf{V_o}/\mathbf{V_s}$ del circuito de la figura. Demuestre que el circuito es un filtro pasabajas.



Ejemplos

Ejemplos

1. Determine qué tipo de filtro es el de la figura, calcule la frecuencia de corte.



2. Diseñe un filtro RL pasabajas que utilice una bobina de 40mH y tenga una frecuencia de corte de 5kHz.
3. En un filtro RL pasaaltas con una frecuencia de corte de 100kHz, L=40mH, encuentre R.