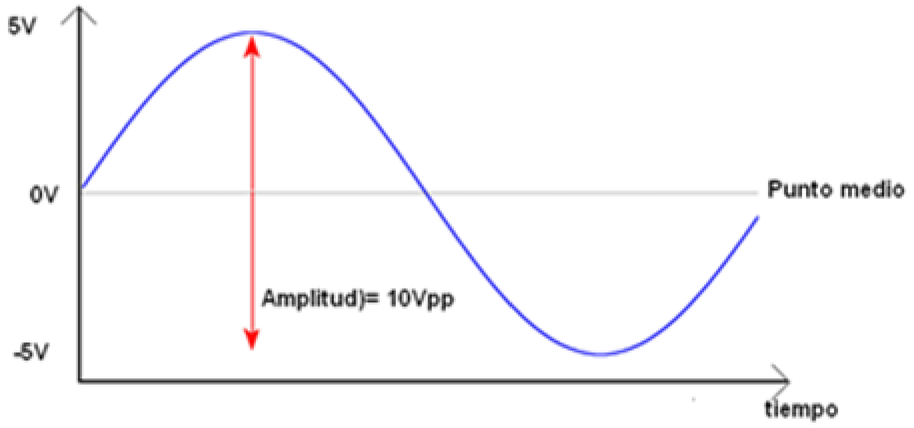
SENOIDES, NÚMEROS COMPLEJOS Y FASORES

Marcela Vallejo Valencia
profemarcelavallejo@gmail.com
http://tableroalparque.weebly.com

CORRIENTE ALTERNA

- Es aquella donde la corriente y el voltaje son variantes en el tiempo, particularmente la excitación senoidal donde la señal tiene forma de seno y coseno
- La corriente senoidal invierte la magnitud de sus valores periódicamente, obteniendo valores positivos y negativos.



SENOIDES

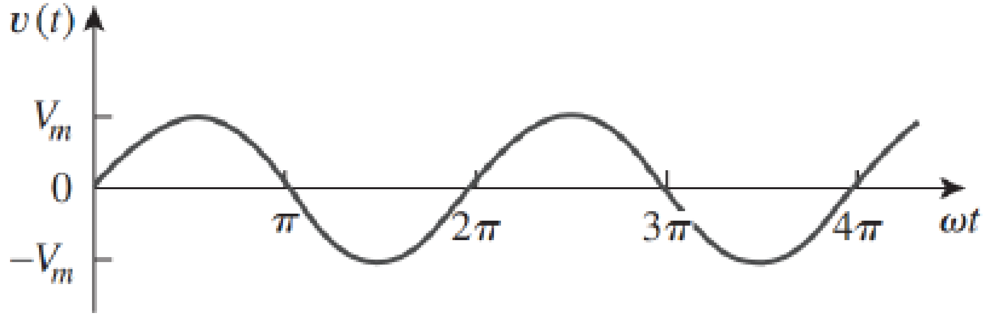
- Un senoide es una señal que tiene la forma de la función seno o coseno.

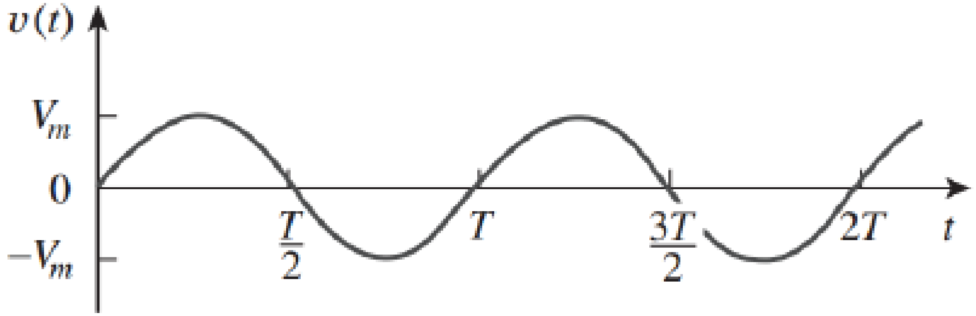
$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

Donde:
V_m: La amplitud de la senoide
ω: La frecuencia angular (Radianes)
ωt: El argumento de la senoide

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$



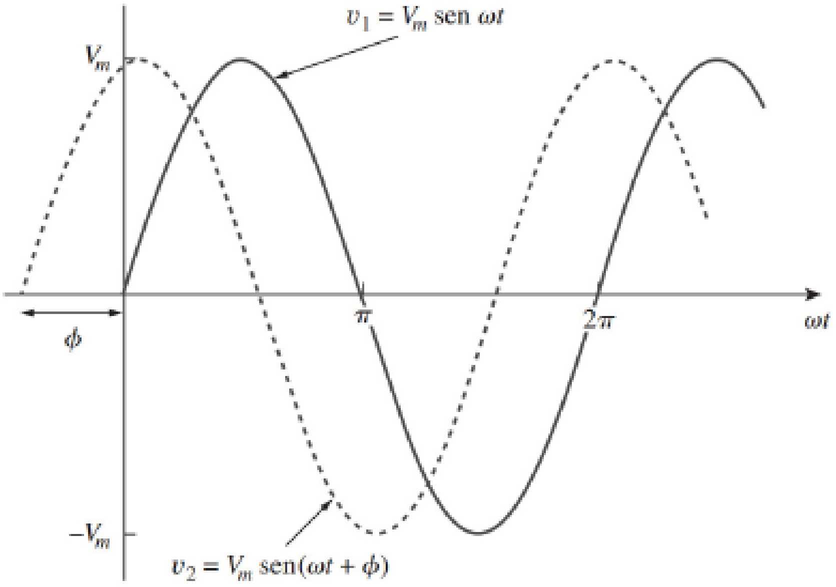


DESFASE DE SEÑALES

Considere una expresión mas general de la senoide:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

Donde ωt es el argumento y ϕ es la fase.
Ahora examinemos estas dos senoides



Se dice que v_2 adelanta a v_1 en ϕ o que v_1 se atraza a v_2 en ϕ.

- Si $\phi \neq 0$: Las señales estás desfazadas
- Si $\phi = 0$: Las señales están en fase

RELACIONES ÚTILES

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos \omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm \cos \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp \sin \omega t$$

EJEMPLO

Calcule el desfase entre

- $v1= -10\cos(\omega t+50°)$
- $v2=12\text{sen}(\omega t-10°)$

EJEMPLO

Halle la amplitud, fase, periodo y frecuencia de la senoide:

$$v(t) = 12 \cos(50t + 10°)$$

FASORES

- Un fasor es un numero complejo que representa la amplitud y la fase de una senoide.

Un número complejo **z** puede escibirse en forma rectangular como:

$$z = x + jy$$

Donde $j = \sqrt{-1}$, x es la parte real de z y y es la parte imaginaria de z.

Un número complejo también puede escribirse en forma polar o exponencial, como:

$$z = r\angle\phi = re^{j\phi}$$

Donde r es la magnitud de z y ϕ es la fase de z

UN NUMERO COMPLEJO SE PUEDE EXPRESAR

$$\begin{aligned} z &= x + jy \text{ (Forma rectangular)} \\ z &= r\angle\phi \text{ (Forma polar)} \\ z &= re^{j\phi} \text{ Forma exponencial} \end{aligned}$$

RELACIÓN ENTRE LA FORMA POLAR Y LA RECTANGULAR

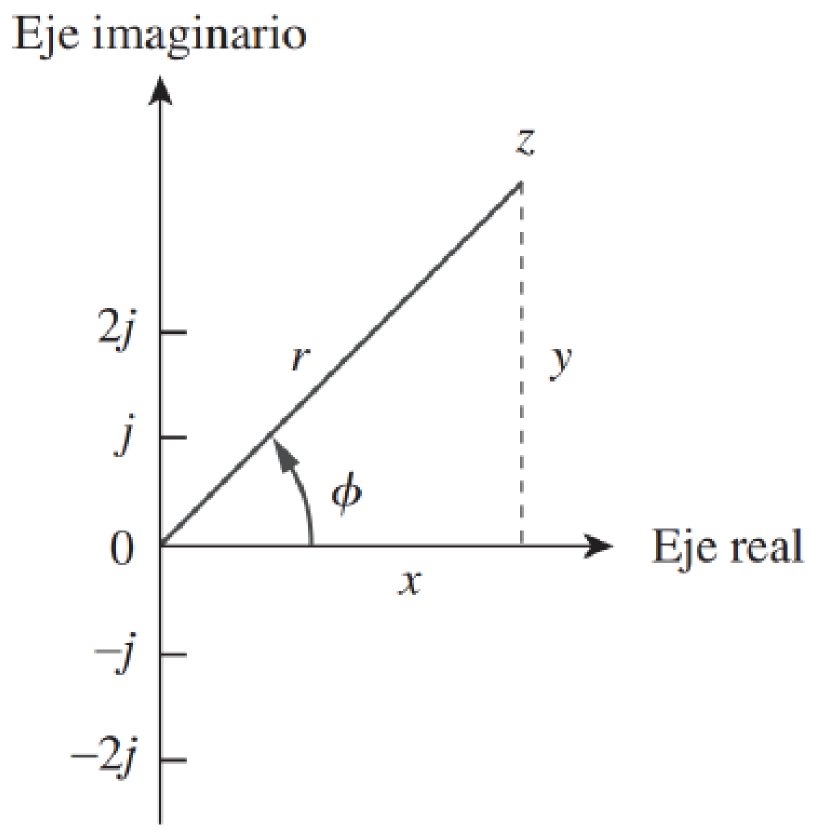


Figura: Representación de un número complejo $z = x + jy = r\angle\phi$

Rectangular ⇒ Polar

Dados x y y, se puede obtener r y ϕ como:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Polar ⇒ Rectangular

Si se conoce r y ϕ se puede obtener x y y como:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

OPERACIONES ENTRE NUMEROS COMPLEJOS

Sea, $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\phi_1$, y $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\phi_2$

- **SUMA**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

- **RESTA**

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

- **MULTIPLICACIÓN**

$$z_1 \times z_2 = (r_1 \times r_2)\angle(\phi_1 + \phi_2)$$

- **DIVISIÓN**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\phi_1 - \phi_2)$$

OPERACIONES ENTRE NUMEROS COMPLEJOS

- **INVERSO**

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\angle - \phi$$

- **RAIZ CUADRADA**

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\angle(\phi/2)$$

- **COMPLEJO CONJUGADO**

$$z^* = x - jy = r\angle - \phi = re^{-j\phi}$$

EJEMPLO

Evalúe las siguientes expresiones

$$(40\angle 50° + 20\angle -30°)^{1/2}$$

$$\frac{10\angle -30° + 3 - j4}{(2 + j4)(3 - j5)^{*}}$$

REPRESENTACION EN FASORES

Transformación Senoide – Fasor

Dominio Temporal	Dominio Fasorial
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$Vm\angle\phi$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$Vm\angle(\phi - 90°)$

ALGO SOBRE LA NOTACIÓN

DOMINIO TEMPORAL		DOMINIO FASORIAL
v	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}$
i	$\longrightarrow$	$\mathbf{I}$

EJERCICIOS

- Transforme estas senoides en fasores:

a) i= 6 cos(50t-40°)

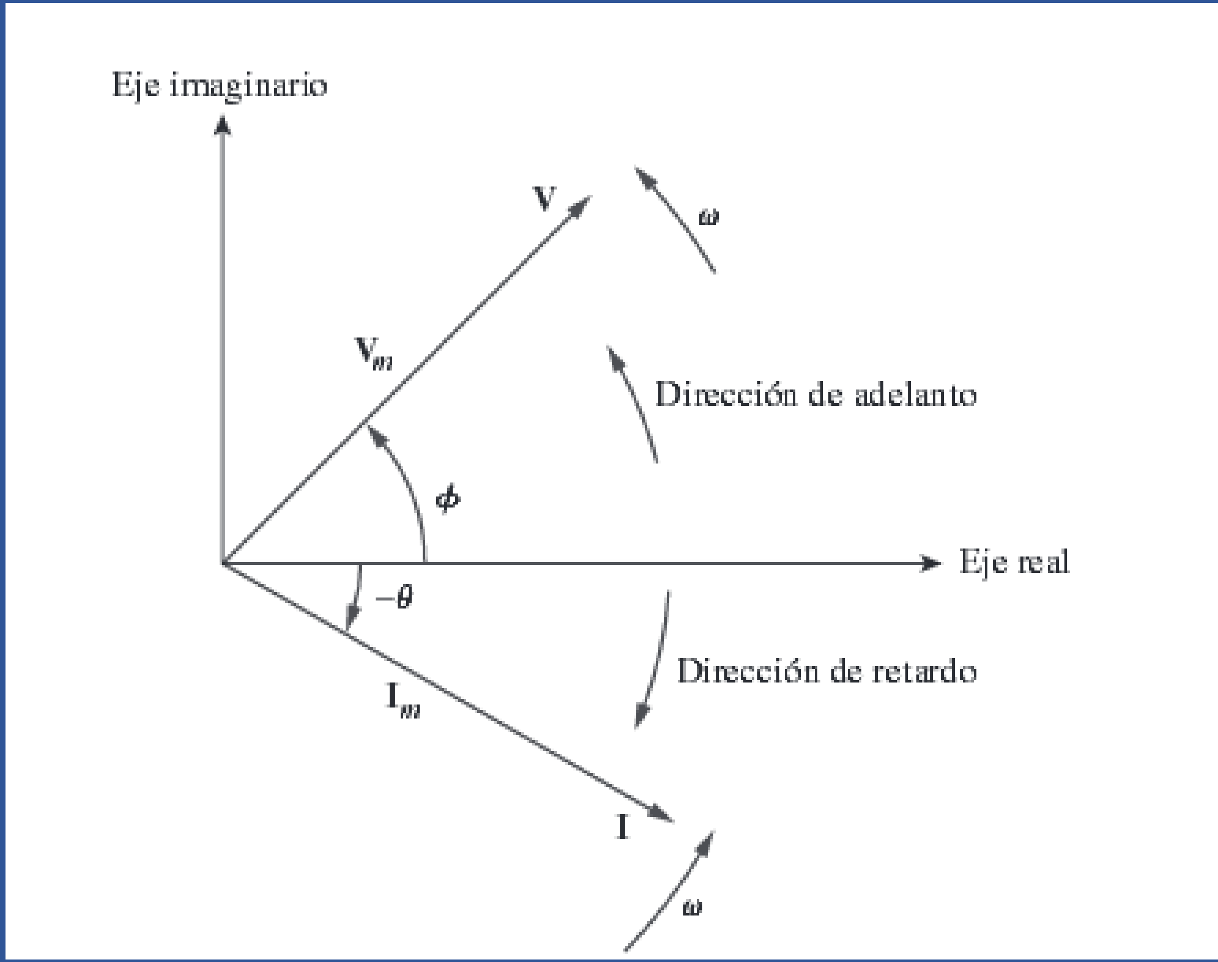
b) v= -4 sin(30t+50°)

Halle las senoides correspondientes a estos fasores:

$$\boldsymbol{V} = 10\angle 30°$$

$$\boldsymbol{I} = -3 + j4$$

DIAGRAMAS FASORIALES



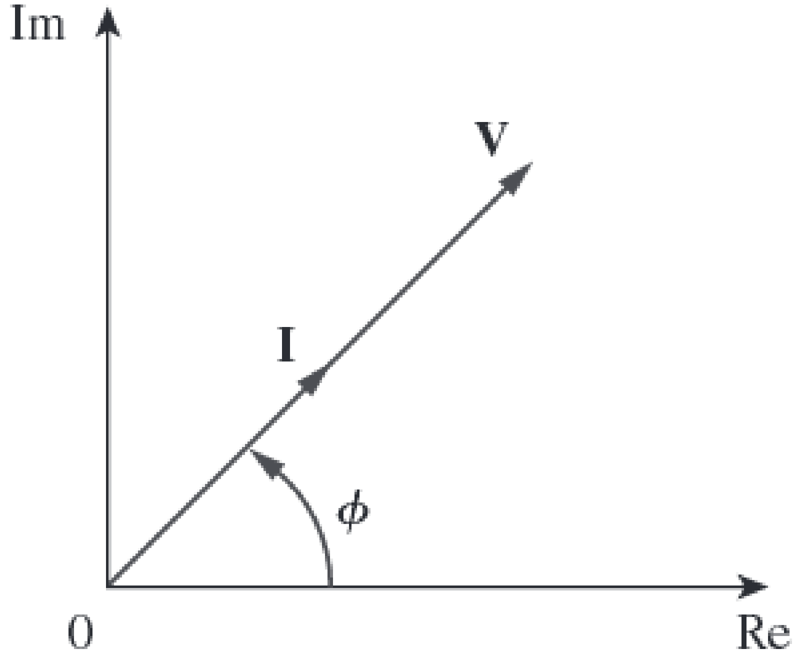
RELACIONES FASORIALES ENTRE LOS ELEMENTOS - RESISTENCIAS

- La relación tensión-corriente del resistor en el dominio fasorial sigue siendo la ley de Ohm

$$v = iR$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}R$$

Tensión y corriente están en fase, como lo ilustra el diagrama fasorial

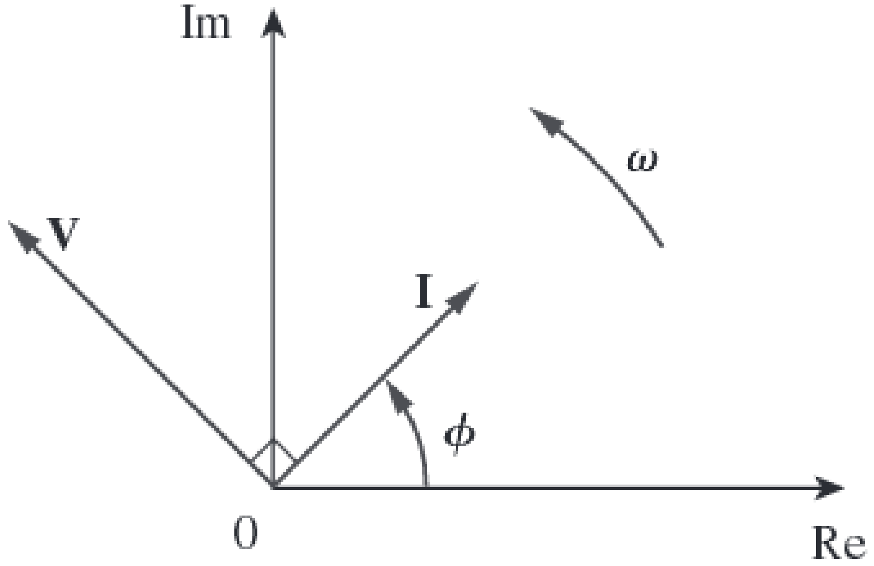


RELACIONES FASORIALES ENTRE LOS ELEMENTOS - INDUCTOR

suponga que por el inductor circula una corriente de

$$\mathbf{I} = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boldsymbol{V} = j\omega L\mathbf{I}$$



La corriente se atrasa 90° a la tensión

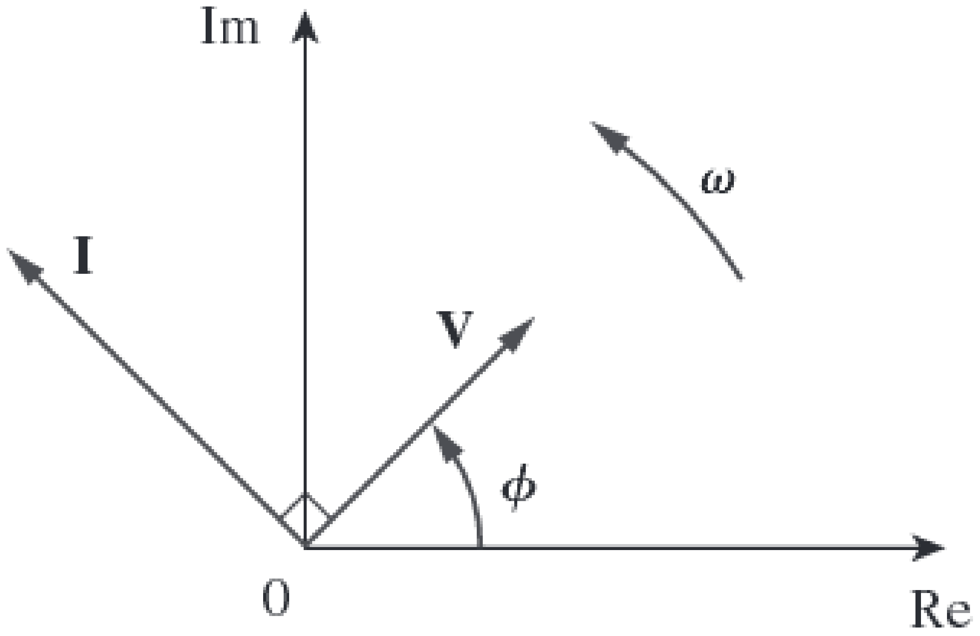
RELACIONES FASORIALES ENTRE LOS ELEMENTOS - CAPACITORES

Suponga que en el capacitor hay una tensión de

$$\mathbf{V} = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

La corriente se adelanta 90°
a la tensión



EN RESUMEN

Elemento	Dominio temporal	Dominio de frecuencia
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

EJEMPLO

- La tensión $v=12 \cos(60t + 45)$ se aplica a un inductor de 0.1H. Halle la corriente que circula por el inductor.

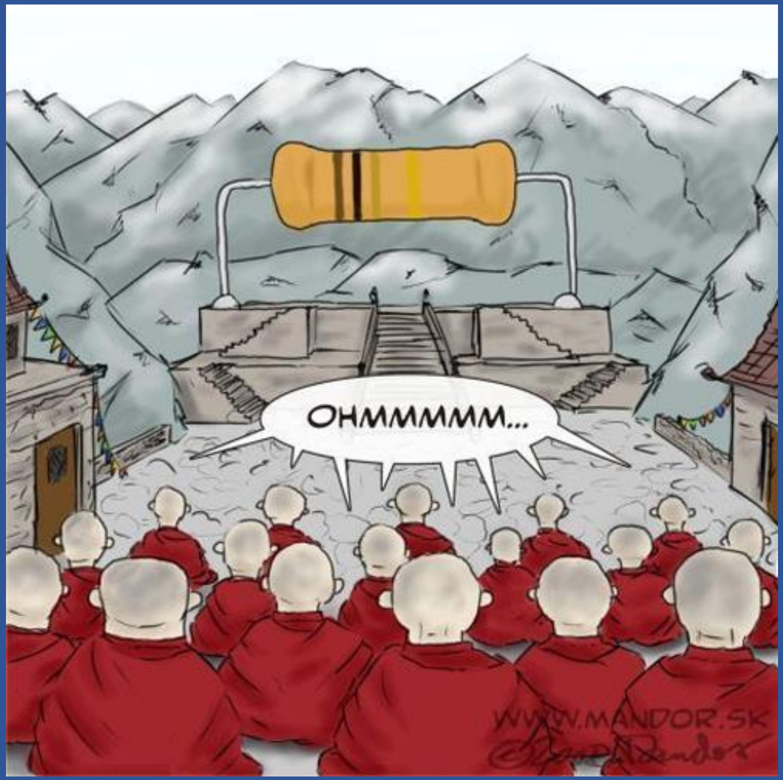
- La tensón $v=\cos (100t-30)$ se aplica a un condensador de 50uF. Calcule la corriente que circula por el condensador.

IMPEDANCIA

Podemos entender la **impedancia** (Z) como la oposición al paso de la corriente alterna. Es la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial

El concepto de impedancia generaliza la ley de Ohm en el estudio de circuitos en corriente alterna (AC).

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$



IMPEDANCIA ← AC

RESISTENCIA ← DC

Aunque es la relación entre dos fasores, la impedancia no es un fasor, porque no corresponde a una cantidad que varíe senoidalmente.

IMPEDANCIA

- Tiene especial importancia si la corriente varía en el tiempo, en cuyo caso el voltaje y la propia impedancia se describen con números complejos
- La impedancia puede representarse como la suma de una parte real y una parte imaginaria:

$$Z = R + jX$$

R es la parte **resistiva** o **real** de la impedancia y

X es la parte **reactiva** o **imaginaria** de la impedancia.

Básicamente hay dos clases o tipos de reactancias:

- Reactancia inductiva o : X_L

  Debida a la existencia de inductores.
- Reactancia capacitiva o : X_C

  Debida a la existencia de capacitores.

IMPEDANCIA

Si $Z=R+jX$ tenemos impedancia inductiva o de retardo. La corriente se atrasa a la tensión

Si $Z=R-jX$ tenemos impedancia capacitiva o de adelanto. La corriente se adelanta a la tensión

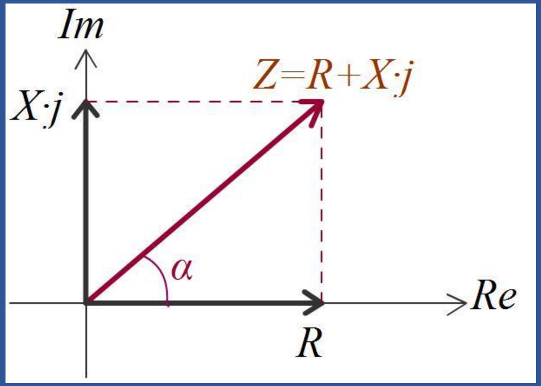
ADMITANCIA

- La **admitancia** es el inverso de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z} = y_c + jy_s$$

•La conductancia es la parte real de la admitancia y la susceptancia es la parte imaginaria de la admitancia.

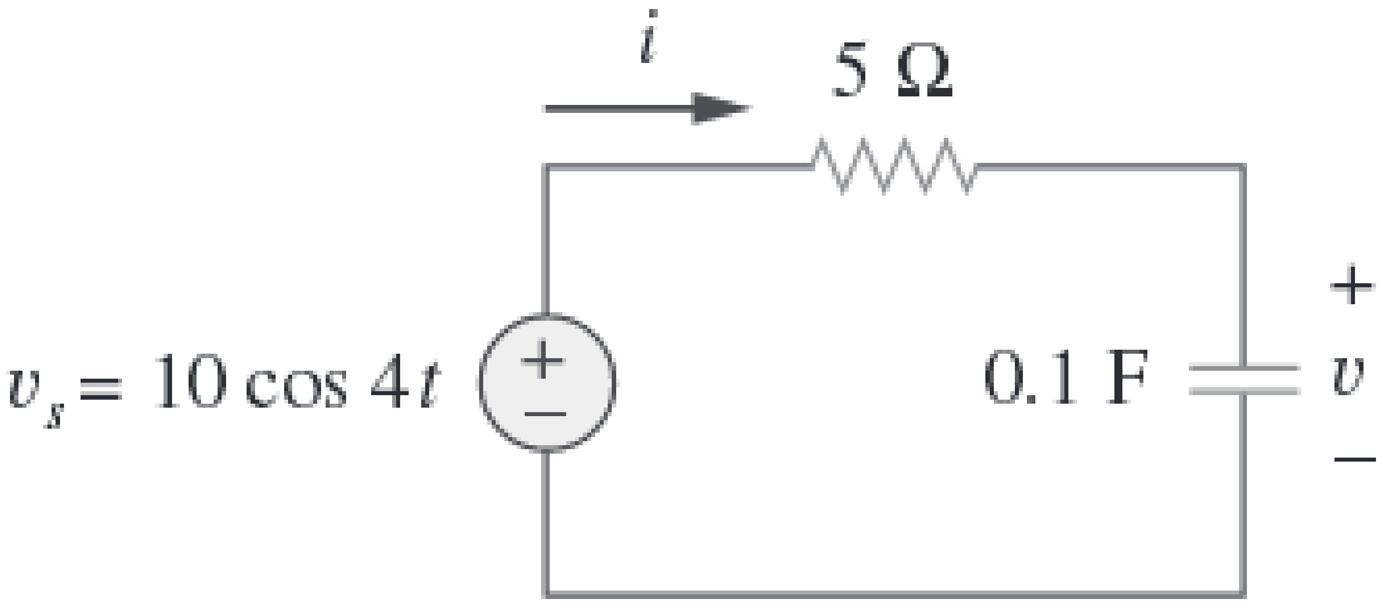
•Una impedancia se puede representar por medio de un vector como el de la Figura



Elemento	Impedancia	Admitancia
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

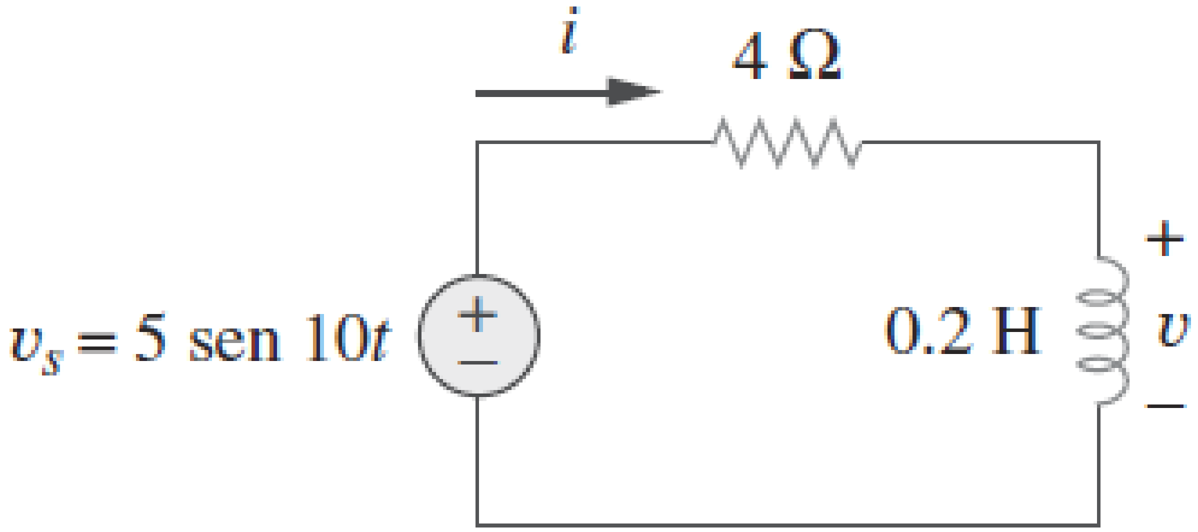
EJERCICIO

- Halle v e i en el circuito de la figura

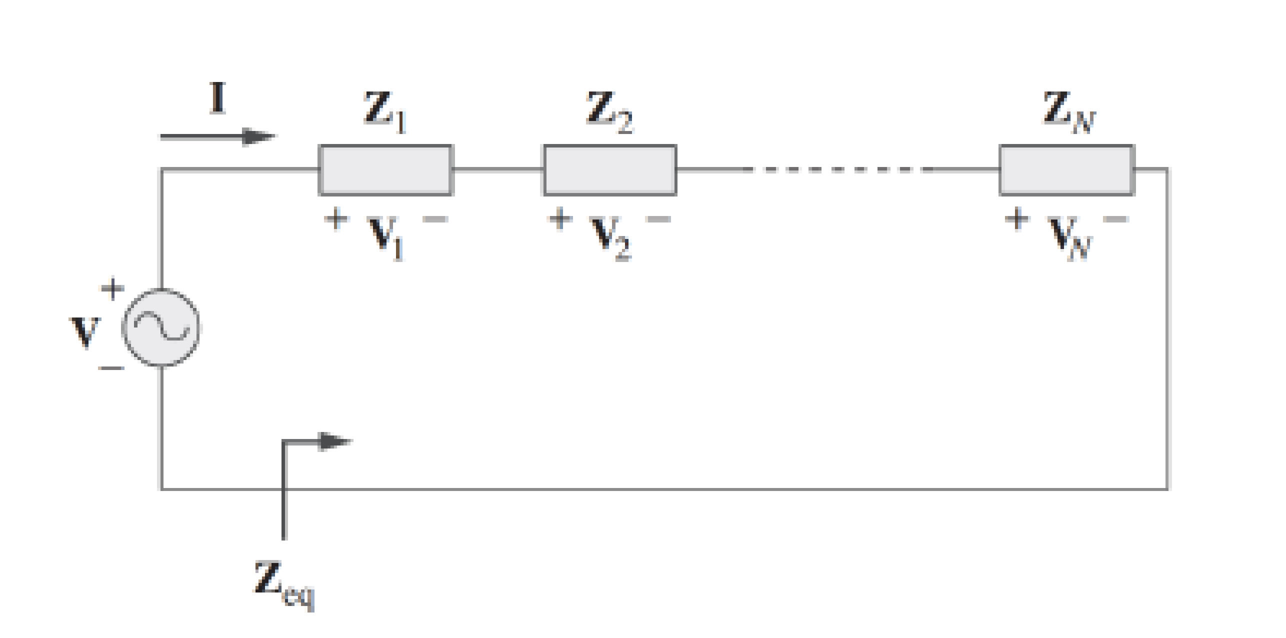


EJERCICIO

- Halle v e i en el circuito de la figura

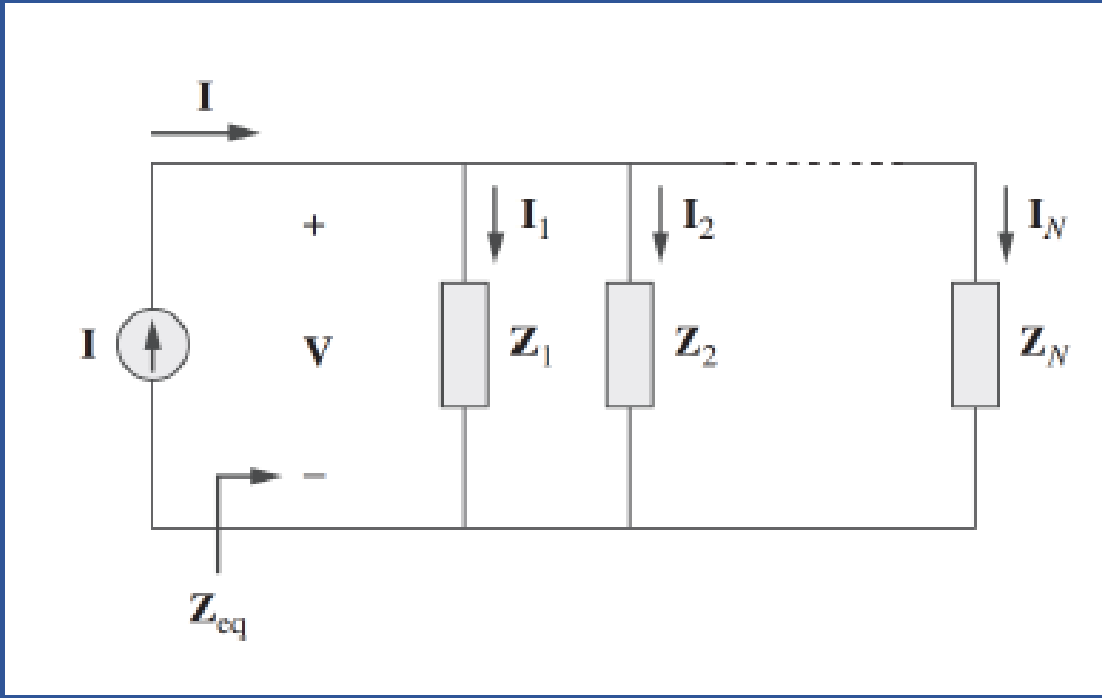


IMPEDANCIAS EN SERIE



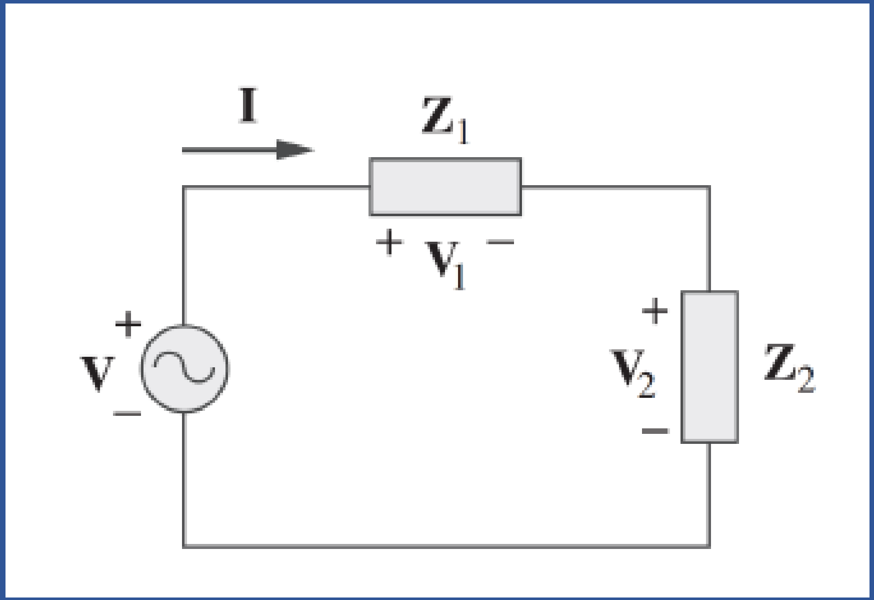
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

IMPEDANCIAS EN PARALELO



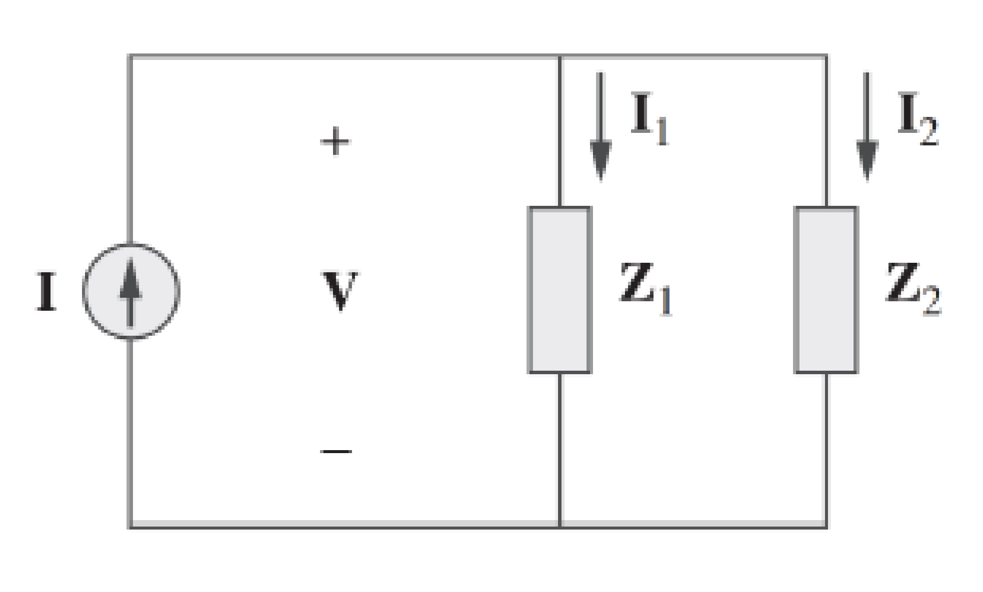
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_N}$$

DIVISOR DE TENSION



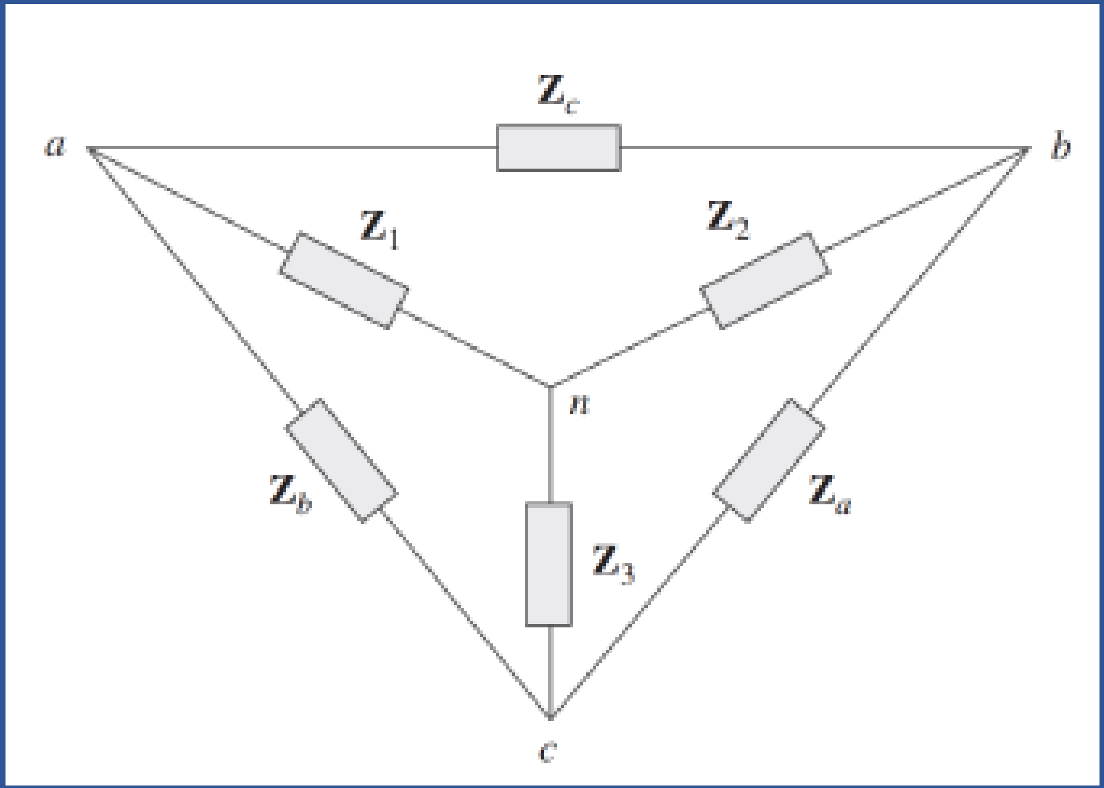
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}$$

DIVISOR DE CORRIENTE



$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}$$

TRANSFORMACIÓN Δ - Y



$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3}$$

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_a + Z_c}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_a + Z_b}$$

EJERCICIO

Halle la impedancia equivalente del circuito, suponga que ω= 50 Rad/s